doi: 10.3969/j.issn.1000-8349.2023.04.08

用于 VLBI 测轨的 PN-DOR 信标研究

陈 奥[1,2]，童 力[2,3,4]，王 瑞[1]，郑为民[2,3,4]

(1. 上海大学 信息与通信工程学院，上海 201900； 2. 中国科学院 上海天文台，上海 200030； 3. 国家基础学科公共科学数据中心，北京 100190； 4. 上海市空间导航与定位技术重点实验室，上海 200030)

摘要： 探测器 DOR 信号与射电源信号频谱特征不同引起的接收设备相位波动误差是月球和深空探测 VLBI 测轨的重要误差源之一。新型 PN-DOR 信标通过使用伪随机序列对现有 DOR 信标扩频调制生成，实现与射电源信号相似的频谱特征，可有效降低相位波动误差。研究 PN-DOR 信标在 VLBI 测轨应用中相位误差与带宽综合群时延误差计算方法，在此基础上通过比较相同发射功率条件下 PN-DOR 与 DOR 信标总时延误差，分析 PN-DOR 的适用条件。

关　键　词： VLBI；PN-DOR 信标；相位误差；群时延误差

中图分类号： P228.6　　　　**文献标识码：** A

1 引 言

甚长基线干涉测量 (very long baseline interferometry, VLBI) 技术是目前空间分辨率最高、测量精度也最高的天文观测技术，广泛应用于天体物理学、天体测量学、大地测量和深空探测领域[1]。在深空探测中，VLBI 测量使用双差分单向测距 (delta differential one-way ranging, ΔDOR)模式，通过交替观测探测器与其邻近已知精确位置的河外致密射电源，以修正设备和传播介质等系统误差。探测器下行信号通常使用统一载波测控体制，DOR 信标通过相位调制在主载波上，其信号 X 波段表达式如下[2]：

$$s(t)=\sqrt{2P_{\rm T}}\sin[2\pi f_{\rm c}t+m_1\sin(2\pi f_1t)+m_2\sin(2\pi f_2t)]\quad, \tag{1}$$

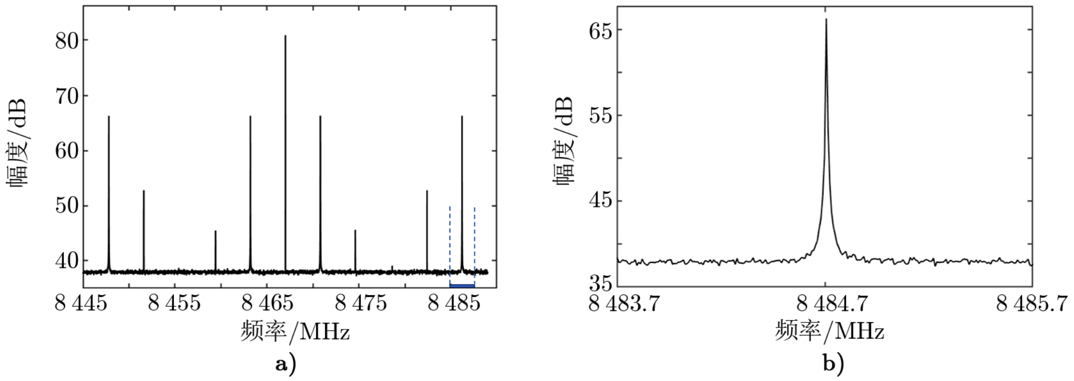
式中，$P_{\rm T}$ 为探测器下行信号功率，m_1、m_2 为调制指数，$f_{\rm c}$ 为主载波频率，f_1 和 f_2 为侧音载波频率。图 1a) 是 X 波段调制 DOR 信标的探测器下行信号频谱图，两组 DOR 信标侧

收稿日期： 2023-02-13；　**修回日期：** 2023-03-30

资助项目： 国家自然科学基金 (11973011)；国家基础科学数据共享服务平台 (DKA2017-12-02-09)；中科院关键技术人才；上海市领军人才；上海天文台重点培育项目

通讯作者： 童力，tongli@shao.ac.cn

音位于主载波两侧，分别距离主载波 3.8 MHz 和 19.2 MHz。主载波和侧音信号均为点频信号，多个通道分别记录点频信号；图 1b) 展示了一个 DOR 侧音通道的频谱。



注：a) X 波段调制 DOR 信标的探测器下行信号频谱图；b) DOR 侧音通道频谱图。

图 1　X 波段调制 DOR 信标的探测器下行信号和 DOR 侧音通道频谱图

VLBI 台站的接收机和终端等电子设备存在相位波动现象。由于 DOR 信标侧音是点频信号，仅受对应频点相位波动影响；而射电源信号是连续谱信号，受到整个观测频段内平均相位波动的影响。两者频谱特征的差异，导致相位波动误差无法通过差分方式较彻底地消除[3–5]。图 2 展示了 ΔDOR 测量相位波动误差来源[6]。蓝色曲线表示设备相位波动下实际频率与相位的关系，绿色箭头指向 DOR 信标侧音处的相频响应，红色曲线表示射电源信号相频响应的线性拟合，红色箭头指向射电源信号在侧音载波处的相频响应，绿色和红色虚线的斜率分别表示探测器和射电源的群时延。

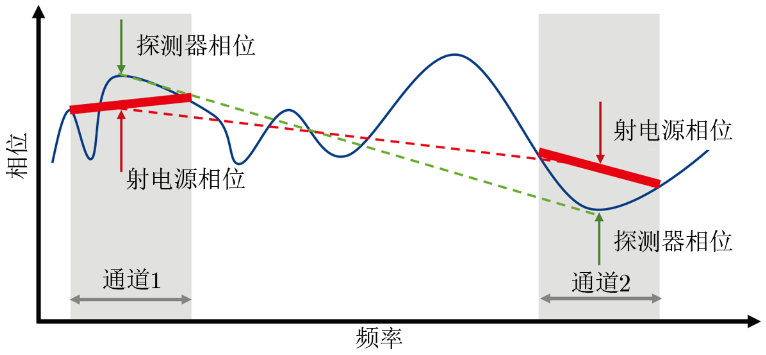


图 2　ΔDOR 测量相位波动误差来源[6]

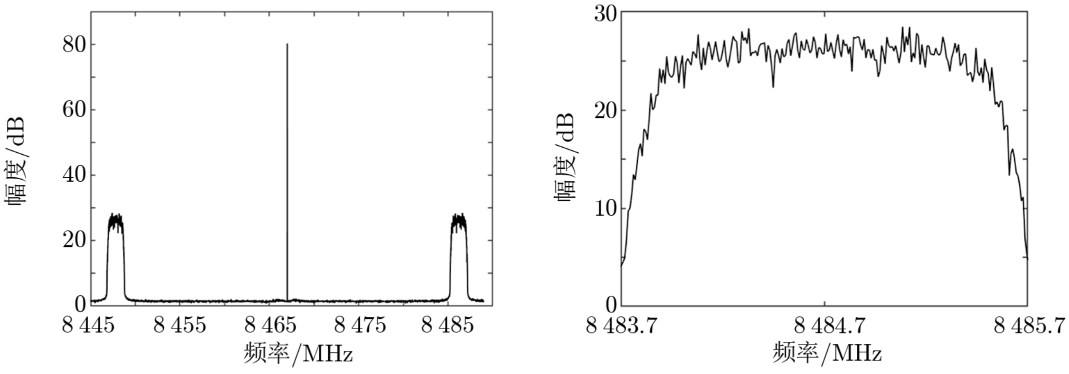
为降低相位波动引起的 VLBI 测量误差，美国喷气推进实验室 (Jet Propulsion Laboratory, JPL) 利用伪随机序列对传统 DOR 信标进行扩频调制，构造具有射电源白噪声频谱特征的信标，这种信标被称为伪随机噪声差分单程测距 (pseudo noise DOR, PN-DOR) 信标。调制 PN-DOR 信标的 X 波段下行信号可表示为[2]：

$$s(t) = \sqrt{2P_{\rm T}}\,\sin[2\pi f_{\rm c}t + ma(t)\sin(2\pi f_{\rm p}t)] \quad , \tag{2}$$

式中，m 为调制指数，f_{p} 为 PN-DOR 信号载波频率，$a(t)$ 为伪随机序列：

$$a(t) = \sum_{n} a_n g(t - nT_{\mathrm{a}}) \quad , \tag{3}$$

式中，$g(t)$ 表示脉冲宽度为 T_{a} 的矩形脉冲，a_n 取值为“+1”或“−1”。X 波段调制 PN-DOR 信标的探测器下行信号频谱如图 3 a) 所示，图 3 b) 展示了一个 PN-DOR 信号通道的频谱。在通道频率范围内，PN-DOR 信号为宽带连续谱信号，与射电源信号频谱近似，可通过差分方式有效减少相位波动误差。图 4 是 JPL 发布的 X 波段 PN-DOR 和 DOR 信标的误差估计分析[7]，图中深色部分表示 PN-DOR 信标的测量误差，浅色部分表示 DOR 信标的测量误差，PN-DOR 信标可减少约 90% 的设备相位波动误差。



注：a) X 波段调制 PN-DOR 信标的探测器下行信号频谱图；b) PN-DOR 信号通道频谱图。

图 3　X 波段调制 PN-DOR 信标的探测器下行信号和 PN-DOR 信号通道频谱图

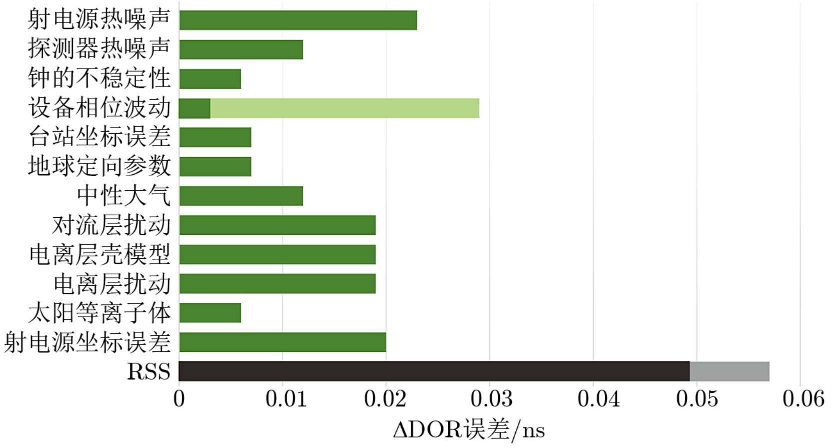


图 4　X 波段 PN-DOR 和 DOR 信标的误差估计[7]

国际空间数据系统咨询委员会 (Consultative Committee for Space Data Systems, CCSDS) 推荐金氏码作为扩频码，根升余弦 (square root raised cosine, SRRC) 滤波器作为整

形滤波器，并对产生金氏码的本原多项式、码速率以及 SRRC 滤波器滚降系数等调制参数给出建议[2]；JPL 开展了 X 波段和 Ka 波段 PN-DOR 信标的调制生成，以及从接收记录数据提取 DOR 和 PN 码相位的后处理方法研究[3, 4, 7]；中国科学院上海天文台也开展了 PN-DOR 信标的软件仿真工作，从时域和频域分析了 PN-DOR 信标的参数设计要求和影响[8]。

本文将进一步研究在相同探测器发射功率条件下两者的差异，更具工程应用意义。论文首先从探测器发射功率出发，对 PN-DOR 信标展开链路分析，然后分别研究有限带宽 PN-DOR 信号和点频主载波信号的相位误差计算方法，进一步分析带宽综合群时延误差，最后以地月链路和 VLBI 数据处理参数为例，对 PN-DOR 信标链路和群时延误差进行计算并分析结果。

2 PN-DOR 的相位误差和群时延误差

VLBI 深空探测通常采用带宽综合技术，使用若干个通道记录不同频点数据，观测并校正不同频点的相位，对主载波和侧音的校正相位进行最小二乘法拟合，获得带宽综合群时延观测值[1]。PN-DOR 信标包含一组有限带宽信号和主载波点频信号，可先分析其链路接收信噪比，再分别对其开展相关处理计算干涉条纹相位误差，最后分析带宽综合群时延误差。

2.1 链路分析

要估算 PN-DOR 信标 VLBI 群时延的测量精度，需计算台站接收探测器信号的信噪比 P/N_0。P/N_0 取决于射频信号从发射到接收的传输链路，受到发送和接收天线参数和性能、信号调制方式、工作频率、传输距离和大气吸收等因素的影响。P/N_0 可表示为：

$$P/N_0 = P_{\mathrm{T}} + G - L - N_0 \quad , \tag{4}$$

式中，P_{T} 为有效全向辐射功率 (effective isotropic radiated power, EIRP)，表示发射机在最大天线增益方向上的发射功率，是发射端唯一的“品质因数”指标；G 为接收天线增益；L 为链路损耗，包含调制损耗 L_{m}、自由空间损耗 L_{d}、大气吸收损耗 L_{c}、天线极化和指向损耗 L_{e}、量化损耗 L_{q}；N_0 为系统噪声。

接收天线增益 G 与天线效率、信号频率和天线口径相关，在主瓣方向上获得最大接收增益 G 可表示为：

$$G = 10\lg\eta + 20\lg(\pi D) + 20\lg f \quad , \tag{5}$$

式中，D 为天线口径，f 为信号工作频率，η 为天线效率。天线效率是天线的重要指标之一，为天线有效面积与实际几何面积之比，用于 VLBI 测量的天线效率一般为 40%~60%[1]。

调制损耗 L_{m} 指主载波或侧音功率与总功率的比值，与调制指数和信号类型相关。将式 (2) 变形为贝塞尔函数形式，表示为[9]：

$$
\begin{aligned}
s(t) =&\sqrt{2P_{\mathrm{T}}}J_0(m)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t) + 2\sqrt{2P_{\mathrm{T}}}J_1(m)a(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\sin(2\pi f_{\mathrm{p}}t)+ \\
&2\sqrt{2P_{\mathrm{T}}}\sum_{k=1}^{+\infty}J_{2k}(m)\sin(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\cos(4k\pi f_{\mathrm{p}}t)+ \\
&2\sqrt{2P_{\mathrm{T}}}\sum_{k=1}^{+\infty}J_{2k+1}(m)a(t)\cos(2\pi f_{\mathrm{c}}t)\sin\left[(4k+2)\pi f_{\mathrm{p}}t\right] \quad ,
\end{aligned} \tag{6}
$$

式中，n 阶第一类贝塞尔函数：

$$
J_n(m) = \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+n+2)}\left(\frac{m}{2}\right)^{2k+n} \quad . \tag{7}
$$

主载波功率 P_{c} 为 ${J_0}^2(m)P_{\mathrm{T}}$，由于 BPSK 信号能量主要集中于主瓣，包含 90% 的能量[10]，因此侧音功率 $P_{\mathrm{d}} \approx 0.9{J_1}^2(m)P_{\mathrm{T}}$。调制损耗可表示为：

$$
\frac{P_{\mathrm{c}}}{P_{\mathrm{T}}} = 20\lg J_0(m) \quad , \quad \frac{P_{\mathrm{d}}}{P_{\mathrm{T}}} = -0.46 + 20\lg J_1(m) \quad . \tag{8}
$$

自由空间损耗 L_{d} 与信号传播距离和信号工作频率相关[11]：

$$
L_{\mathrm{d}} = 20\lg\left(\frac{c}{4\pi f d}\right) \quad , \tag{9}
$$

式中，c 为真空中光的传播速度，f 为信号频率，d 为探测器与地面台站接收天线的距离。

大气吸收损耗 L_{c} 是由于大气中的各种气体以及降水 (雨、雾、雪等) 对电波具有吸收作用引起的损耗，探测器 X 波段的大气吸收损耗 $L_{\mathrm{c}} \approx 0.8$ dB[12]。天线指向损耗 L_{e} 是指台站天线与探测器天线偏离轴向引起的损耗。天线极化损耗是指天线与来波的极化不能完全匹配所引起的损耗，探测器下行链路中由于天线指向和极化所产生的损耗 $L_{\mathrm{e}} \approx 0.5$ dB[11]。量化损耗 L_{q} 是指数据采集终端对中频信号进行数字化采样、量化和编码过程中产生的损耗。目前普遍采用的 2 比特量化损耗 $L_{\mathrm{q}} \approx 0.56$ dB[12]。

信号传输链路存在噪声，根据噪声源可分为地球噪声源、地球外噪声源、人为噪声源。地球噪声源包括大气气体辐射、云雨辐射噪声等；地球外噪声源包括宇宙背景噪声、天体射电源辐射等；人为噪声包括电子设备和其他通信系统辐射。系统噪声可用等效噪声温度衡量，系统噪声功率 N_0 表示为：

$$
N_0 = 10\lg(kT_{\mathrm{n}}B) \quad , \tag{10}
$$

式中，k 为玻尔兹曼常数，T_{n} 为系统等效噪声温度，B 为带宽。

2.2　有限带宽 PN-DOR 信号的相位误差分析

VLBI 相关处理流程根据傅里叶变换 (F) 和相乘积分 (X) 的先后顺序可分为 FX 型和 XF 型两种类型，本文依据 FX 型处理机流程分析相位误差。

PN-DOR 信号是有限带宽信号，可认为是满足高斯分布的白噪声信号。设台站 1、2 接收到的信号功率分别为 P_1 和 P_2，噪声功率为 N_1 和 N_2，等效噪声温度为 $T_{\rm n1}$ 和 $T_{\rm n2}$，通道带宽为 B，采样率为 $2B$，积分时间为 T，傅里叶变换长度为 M，则相关处理在 T 时间内做 $2BT/M$ 次傅里叶变换，每次傅里叶变换对应数据时长为 $M/2B$，该时段内，台站 1 的信号能量 $E_{\rm s1}$ 和噪声能量 $E_{\rm n1}$ 可表示为：

$$\begin{cases} E_{\rm s1} = P_1 \dfrac{M}{2B} \quad , \\ E_{\rm n1} = N_1 \dfrac{M}{2B} = \dfrac{kMT_{\rm n1}}{2} \quad . \end{cases} \tag{11}$$

白噪声信号的能量可认为在频域内均匀分布，台站 1 的信号 $\boldsymbol{O}_1(f)$ 在频域内可表示为：

$$\boldsymbol{O}_1(f) = \sqrt{\frac{P_1}{2B}} \boldsymbol{S}(f) + \sqrt{\frac{kT_{\rm n1}}{2}} \boldsymbol{N}_1(f) \quad , \tag{12}$$

式中，$\boldsymbol{S}(f)$ 为接收信号，$\boldsymbol{N}_1(f)$ 为台站 1 的噪声，两者服从均值为 0，方差为 1 的复高斯信号，其实部与虚部相互独立，方差均为 0.5。

类似地，台站 2 的信号 $\boldsymbol{O}_2(f)$ 可表示为：

$$\boldsymbol{O}_2(f) = \sqrt{\frac{P_2}{2B}} \boldsymbol{S}(f) {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau} + \sqrt{\frac{kT_{\rm n2}}{2}} \boldsymbol{N}_2(f) \quad , \tag{13}$$

式中，τ 为同一波前到达两个台站的时间差，${\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau}$ 为时间差产生的相位差，$\boldsymbol{N}_2(f)$ 为台站 2 的噪声。对两个台站的接收信号相位补偿和相关积分，得到在频点 f 的可见度数据 $\boldsymbol{R}(f)$[13]：

$$\boldsymbol{R}(f) = \frac{M}{2BT} \sum_{i=1}^{2BT/M} \boldsymbol{O}_{1i}(f) \boldsymbol{O}_{2i}^*(f) {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau} \quad . \tag{14}$$

把式 (12) 和式 (13) 代入式 (14)，可得：

$$\boldsymbol{R}(f) = \boldsymbol{V}(f) + \boldsymbol{N}_{\rm n}(f) \quad , \tag{15}$$

式中，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{V}(f) =& \frac{M\sqrt{P_1 P_2}}{4B^2T} \sum_{i=1}^{2BT/M} \boldsymbol{S}_i(f) \boldsymbol{S}_i^*(f) \quad , \\ \boldsymbol{N}_{\rm n}(f) =& \frac{M\sqrt{kBP_1T_{\rm n2}}}{4B^2T} \sum_{i=1}^{2BT/M} \boldsymbol{S}_i(f) \boldsymbol{N}_{2i}^*(f) {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau} + \\ & \frac{M\sqrt{kBP_2T_{\rm n1}}}{4B^2T} \sum_{i=1}^{2BT/M} \boldsymbol{S}_i^*(f) \boldsymbol{N}_{1i}(f) {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau} + \\ & \frac{kM\sqrt{T_{\rm n1}T_{\rm n2}}}{4BT} \sum_{i=1}^{2BT/M} \boldsymbol{N}_{1i}(f) \boldsymbol{N}_{2i}^*(f) {\rm e}^{-{\rm j}2\pi f\tau} \quad , \end{aligned} \tag{16}$$

其中，$\boldsymbol{V}(f)$ 表示信号，$\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 表示附加噪声。由于 $\boldsymbol{S}(f)\boldsymbol{S}^{*}(f)=|\boldsymbol{S}(f)|^{2}$，信号幅度 $|\boldsymbol{V}(f)|$ 为 $\sqrt{P_1P_2}/2B$；$\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 的实部和虚部独立服从于均值为 0，方差为 σ^2 的高斯分布，因此，附加噪声的幅度 $|\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)|$ 服从于瑞利分布，其方差 $\sigma^2_{|\boldsymbol{N}_{\rm n}|}$ 为：

$$\sigma^2_{|\boldsymbol{N}_{\rm n}|}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\sigma^2 \quad , \tag{17}$$

式中：

$$\sigma^2=\frac{kM(P_1T_{\rm n2}+P_2T_{\rm n1})+k^2MBT_{\rm n1}T_{\rm n2}}{16B^2T} \quad . \tag{18}$$

图 5 为信号 $\boldsymbol{V}(f)$ 与噪声 $\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 的关系矢量图[13]，横轴与纵轴分别表示向量实部和虚部，信号向量与横轴夹角为相位。$\boldsymbol{i}$ 表示垂直于信号 $\boldsymbol{V}(f)$ 的单位向量，θ 为 $\boldsymbol{i}$ 与 $\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 的夹角。因此，条纹相位误差 σ^2_φ 为：

$$\sigma^2_\varphi=\frac{(\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)\cdot\boldsymbol{i})^2}{|\boldsymbol{V}(f)|^2} \quad , \tag{19}$$

其中，θ 均匀分布于 0∼2π，$|\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)|$ 和 θ 两者统计独立，因此 $(\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)\cdot\boldsymbol{i})^2$ 的均值满足以下关系式：

$$E[(\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)\cdot\boldsymbol{i})^2]=E(|\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)|^2)E(\cos^2\theta)=\sigma^2 \quad . \tag{20}$$

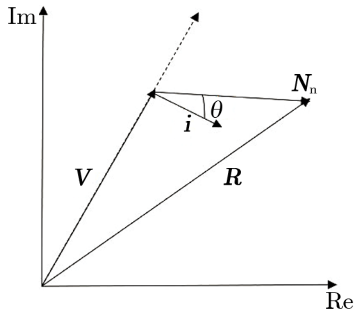


图 5　信号 $\boldsymbol{V}(f)$ 与噪声 $\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 的关系矢量图[13]

把式 (18) 和式 (20) 代入式 (19)，计算得到条纹相位误差 σ^2_φ，表示为：

$$\sigma^2_\varphi=\frac{kM(P_1T_{\rm n2}+P_2T_{\rm n1})+k^2MBT_{\rm n1}T_{\rm n2}}{4TP_1P_2} \quad . \tag{21}$$

在 VLBI 观测中，通常 $P_1\ll kT_{\rm n1}B$、$P_2\ll kT_{\rm n2}B$，假设台站 1 与 2 接收到的信号功率和等效噪声温度相等，即 $P_1=P_2=P$，$T_{\rm n1}=T_{\rm n2}=T_{\rm n}$，并结合式 (10)，$\sigma_\varphi$ 可简化为：

$$\sigma_\varphi\approx\sqrt{\frac{k^2MB{T_{\rm n}}^2}{4TP^2}}=\frac{1}{P/N_0\sqrt{4TB/M}} \quad . \tag{22}$$

式中，P/N_0 为链路分析得到的台站接收信噪比。

2.3　点频主载波信号的相位误差分析

点频主载波信号的相位误差分析与 PN-DOR 信号的相位误差计算步骤相似。在相同参数条件下，一组傅里叶变换时间 $M/2B$ 内，台站 1 的主载波信号能量 $E_{\rm sx}$ 和噪声能量 $E_{\rm nx}$ 为：

$$\begin{cases} E_{\rm sx}=P_1\dfrac{M}{2B} \quad , \\ E_{\rm nx}=N_{\rm x}\dfrac{M}{2B}=\dfrac{kMT_{\rm n1}}{2} \quad . \end{cases} \tag{23}$$

点频信号能量集中于频点处，台站 1 包含主载波的通道信号 $\boldsymbol{O}_1(f)$ 为：

$$\boldsymbol{O}_1(f)=\sqrt{\frac{MP_1}{2B}}\boldsymbol{S}(f)+\sqrt{\frac{kT_{\rm n1}}{2}}\boldsymbol{N}_1(f) \quad . \tag{24}$$

同理，台站 2 单个通道内的信号 $\boldsymbol{O}_2(f)$ 可表示为：

$$\boldsymbol{O}_2(f)=\sqrt{\frac{MP_2}{2B}}\boldsymbol{S}(f){\rm e}^{-j2\pi f\tau}+\sqrt{\frac{kT_{\rm n1}}{2}}\boldsymbol{N}_2(f) \quad , \tag{25}$$

其中，τ 为同一波前到达两个台站的时间差，$\boldsymbol{S}(f)$、$\boldsymbol{N}_1(f)$ 和 $\boldsymbol{N}_2(f)$ 分别为接收信号、台站 1、2 的噪声。它们服从均值为 0，方差为 1 的复高斯信号，其实部与虚部相互独立，且方差为总体方差的一半，均为 0.5。

对台站 1、2 的接收信号进行时延补偿和相关积分，得到在频点 f 的可见度数据 $\boldsymbol{R}(f)$[13]：

$$\boldsymbol{R}(f)=\boldsymbol{V}(f)+\boldsymbol{N}_{\rm n}(f) \quad , \tag{26}$$

式中：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{V}(f)=&\frac{M^2\sqrt{P_1P_2}}{4B^2T}\sum_{i=1}^{2BT/M}\boldsymbol{S}_i(f)\boldsymbol{S}_i^*(f) \quad ,\\
\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)=&\frac{M}{4BT}\sqrt{\frac{kMP_1T_{\rm n2}}{B}}\sum_{i=1}^{2BT/M}\boldsymbol{S}_i(f)\boldsymbol{N}_{2i}^*(f){\rm e}^{-j2\pi f\tau}+\\
&\frac{M}{4BT}\sqrt{\frac{kMP_2T_{\rm n1}}{B}}\sum_{i=1}^{2BT/M}\boldsymbol{S}_i^*(f)\boldsymbol{N}_{1i}(f){\rm e}^{-j2\pi f\tau}+\\
&\frac{kM\sqrt{T_{\rm n1}T_{\rm n2}}}{4BT}\sum_{i=1}^{2BT/M}\boldsymbol{N}_{1i}(f)\boldsymbol{N}_{2i}^*(f){\rm e}^{-j2\pi f\tau} \quad .
\end{aligned} \tag{27}$$

其中，$\boldsymbol{V}(f)$ 表示信号，其幅度 $|\boldsymbol{V}(f)|$ 为 $M\sqrt{P_1P_2}/2B$，$\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)$ 表示附加噪声，其幅度 $|\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)|$ 服从瑞利分布，其方差为：

$$\sigma^2_{|\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)|}=\left(2-\frac{\pi}{2}\right)\frac{kM^2(P_1T_{\rm n2}+P_2T_{\rm n1})+k^2MBT_{\rm n1}T_{\rm n2}}{16B^2T} \quad . \tag{28}$$

同理，点频主载波信号的相位误差 ${\sigma_\varphi}^2$ 为：

$${\sigma_\varphi}^2=\frac{(\boldsymbol{N}_{\rm n}(f)\cdot\boldsymbol{i}_\varphi)^2}{|\boldsymbol{V}(f)|^2}=\frac{kM(P_1T_{\rm n2}+P_2T_{\rm n1})+k^2BT_{\rm n1}T_{\rm n2}}{4MP_1P_2T} \quad . \tag{29}$$

在 VLBI 观测中，通常满足 $P_1\ll kT_{\rm n1}B$，$P_2\ll kT_{\rm n2}B$，假设台站 1 与 2 接收到的信号功率和等效噪声温度都相等，即 $P_1=P_2=P$，$T_{\rm n1}=T_{\rm n2}=T_{\rm n}$，并结合式 (10)，$\sigma_\varphi$ 可估算为：

$$\sigma_\varphi\approx\sqrt{\frac{k^2{T_{\rm n}}^2B}{4P^2MT}}=\frac{1}{P/N_0\sqrt{4MTB}} \quad . \tag{30}$$

式中，P/N_0 为链路分析得到的台站接收信噪比。

2.4 群时延误差估计

通过对多个频点相位进行线性拟合，可得到相位随频率的变化率，即群时延[13]。测量 VLBI 群时延常采用最小二乘线性拟合法，结合采用带宽综合技术，对主载波和一组 PN-DOR 信号分别设置观测通道，由多个观测通道的相位值和频点经线性拟合得到带宽综合群时延，其拟合误差即为带宽综合群时延误差。设傅里叶变换长度为 M，对 $n = M + 1$ 个频点相位进行线性拟合，即：

$$\varphi_i = 2\pi f_i \tau_{\rm g} + \xi \quad (i = 1, 2, 3, \cdots, n) \quad , \tag{31}$$

式中，f_i 和 φ_i 为频点及对应相位，$\tau_{\rm g}$ 为群时延，ξ 为相位偏移。式 (31) 用线性方程组形式表示为：

$$\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi f_1 & 1 \\ 2\pi f_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 2\pi f_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_{\rm g} \\ \xi \end{bmatrix} \quad . \tag{32}$$

群时延误差估计问题可视为最小二乘法解误差问题，其参数误差估计矩阵为[13]：

$$\boldsymbol{\Sigma}_{\tau_{\rm g},\xi} = (\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \boldsymbol{A})^{-1} \quad , \tag{33}$$

式中，$\boldsymbol{\Sigma}$ 为观测误差矩阵，用相位随机误差 σ_φ^2 可将其表示为：

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\varphi_1}^2 & & & \\ & \sigma_{\varphi_2}^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_{\varphi_n}^2 \end{bmatrix} \quad . \tag{34}$$

因此，可得到参数误差估计矩阵：

$$\Sigma_{\tau_{\rm g},\xi} = \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{\varphi_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}^2}\right)^2} \begin{bmatrix} \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{\varphi_i}^2} & -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}^2} \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}^2} & \sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}}\right)^2 \end{bmatrix} \quad . \tag{35}$$

矩阵的第一行第一列元素即对群时延 $\tau_{\rm g}$ 的误差估计 σ_τ^2：

$$\sigma_\tau^2 = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{\varphi_i}^2}}{\sum\limits_{i=1}^{n} \left(\frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}}\right)^2 \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{1}{\sigma_{\varphi_i}^2} - \left(\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{2\pi f_i}{\sigma_{\varphi_i}^2}\right)^2} . \tag{36}$$

式中，f_i 和 σ_{φ_i} 为频点及对应相位误差。

3 数值计算与分析

在观测中可认为 DOR 与 PN-DOR 的射电源噪声、钟不稳定性等误差都相同，主要差异在于相位波动引起的群时延误差和探测器群时延误差。在表 1 的地月链路和 VLBI 数据处理参数条件下，开展 PN-DOR 和 DOR 的链路和探测器群时延误差计算。根据式 (4) 计算得 PN-DOR 信标的接收信噪比 P/N_0，再根据式 (22) 和 (30) 估算 PN-DOR 信号和主载波的相位误差，并根据式 (36) 分析 PN-DOR 的带宽综合群时延误差。DOR 的群时延误差的计算思路与 PN-DOR 相似，差异在于 DOR 信标侧音是点频信号，侧音和主载波的相位误差求得均根据式 (30) 解出。

表 1　地月链路和 VLBI 数据处理参数

参数	数值
工作频率 f/GHz	8.45
传输距离 d/m	4×10^8
调制指数 m/rad	0.4
接收天线口径 D/m	25
天线工作效率 η	0.45
等效噪声温度 T_n/k	270
观测通道带宽 B/Hz	2×10^6
采样比特数	2
积分时间 T/s	5
傅里叶变换长度 M	1 024

根据探测器群时延误差的计算结果，并参考图 4 中其他误差项，计算 PN-DOR 和 DOR 信标测量的所有时延误差项的均方根 (root sum square, RSS)，结果见图 6 a)。图 6 a) 的横坐标表示发射功率 P_T，纵坐标表示 RSS；图 6 b) 展示了发射功率 P_T 在 15~25 dB·W 范围内的 RSS 变换情况。PN-DOR 和 DOR 信标的 RSS 均随着发射功率的增大而减小。在发射功率较低的情况下，DOR 信标比 PN-DOR 信标的群时延误差低，但随着发射功率的增加，探测器测量误差减小，相位波动误差逐渐成为主要误差项，PN-DOR 信标有更好的测量效果。

在数据处理时，傅里叶变换长度会影响 VLBI 测量效果。进一步分析傅里叶变换长度对 PN-DOR 测量误差的影响，并与 DOR 测量误差进行比较，设置发射功率 P_T 为 10 dB·W，其余参数参考表 1。表 2 和表 3 分别展示了不同傅里叶变换长度下的 PN-DOR 和 DOR 信标的群时延误差，包括 PN-DOR 信号、DOR 侧音和主载波的相位误差，探测器群时延误差以及误差项的 RSS。在表 2 中，探测器群时延误差计算使用主载波和距主载波 19.2 MHz 的 DOR 侧音，DOR 信标的相位误差随着傅里叶变换长度的降低而增大，因此整体测量效果下降。降低傅里叶变换长度能减少 PN-DOR 信号的相位误差，但参与拟合的频点数量也减少，表 3 的计算结果表明，在不同傅里叶变换长度下 PN-DOR 群时延误差几乎不变。这个结论也可通过对式 (22) 和 (30) 进行理论分析获得。

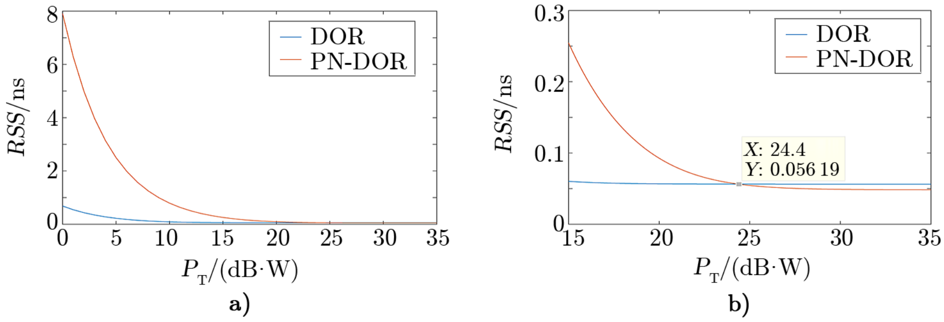


图 6　不同发射功率 P_T 下 PN-DOR 和 DOR 信标测量误差

表 2　不同傅里叶变换长度的 DOR 信标群时延误差

傅里叶变换长度 M	DOR 侧音相位误差 σ_ϕ/rad	主载波相位误差 σ_ϕ/rad	探测器群时延误差 σ_τ/ns	RSS /ns
1 024	2.902e−3	1.209e−4	0.017	0.059
512	4.104e−3	1.710e−4	0.024	0.061
256	5.805e−3	2.418−4	0.034	0.066
128	8.209e−3	3.420e−4	0.048	0.074
64	1.161e−2	4.836e−4	0.068	0.088

表 3　不同傅里叶变换长度的 PN-DOR 信标群时延误差

傅里叶变换长度 M	PN-DOR 信号相位误差 σ_ϕ/rad	主载波相位误差 σ_ϕ/rad	探测器群时延误差 σ_τ/ns	RSS /ns
1 024	3.047	1.115e−4	0.790	0.791
512	2.153	1.578e−4	0.790	0.791
256	1.523	2.230e−4	0.790	0.791
128	1.077	3.154e−4	0.790	0.791
64	0.761	4.461e−4	0.790	0.791

4　总 结

本文从探测器发射功率出发，对 PN-DOR 信标进行了链路分析，研究了有限带宽 PN-DOR 信号和点频主载波信号的相位误差计算方法，分析了带宽综合群时延误差，最后参考地月链路和 VLBI 数据处理参数，对 PN-DOR 信标进行了链路和群时延误差计算与分析。目前我国探月工程探测器测控信标等效全向辐射功率多在 0 dB·W 量级，现阶段 VLBI 测量使用的 DOR 信标优于 PN-DOR 信标 (见图 6)。但面对未来深空探测更高精度的需求，已被纳入 CCSDS 标准的 PN-DOR 信标在抑制设备相位波动误差方面具有独特的优势。本文对 PN-DOR 信标的研究成果作为技术储备，可用于后续我国 VLBI 技术的研究和应用。

参考文献：

[1] 钱志翰, 李金岭. 甚长基线干涉测量技术在深空探测中的应用. 北京: 中国科学技术出版社, 2012: 1

[2] CCSDS. https://public.ccsds.org/Pubs/500x1g2.pdf, 2019

[3] Towfic Z J, Voss T J, Shihabi M M. 2019 IEEE Aerospace Conference, Wyoming, USA, 2019: 2

[4] Towfic Z J, Volk C P, Border J S, et al. IEEE Aerospace and Electronic Systems Magazine, 2020, 35(3): 70

[5] Mercolino M, Ardito A, Barbaglio F, et al. 7th ESA International Workshop on Tracking, Telemetry and Command Systems for Space Applications, Noordwijk: ESA-ESTEC, 2016: 13

[6] Stephen T. Lowe A. Measurement of X-Band Front-End Phase Dispersion for Delta-Differenced One-Way Range (DDOR) Experiments. https://ipnpr.jpl.nasa.gov/progress report/42-184/184B.pdf, 2011

[7] Volk C P, Border J S, Towfic Z J, et al. The Interplanetary Network Progress Report. California: Jet Propulsion Laboratory, 2021: 1

[8] 甘江英, 舒逢春, 吴亚军, 等. 中国空间科学技术. 2022, 42(2): 91

[9] 韩魁选, 忻鼎勇, 柴肇刊. 微波统一测控系统设计导论. 北京: 国防工业出版社, 1984: 25

[10] 于志坚. 航天测控系统工程. 北京: 国防工业出版社, 2009: 187

[11] 肖景明, 王元坤. 电波传播工程计算. 西安: 西安电子科技大学出版社, 1989: 201

[12] Thompson A R, Moran J M, Swenson G W. Interferometer and Synthesis in Radio Astronomy (Second Edition). USA: John Wiley and Sons Inc, 2001: 260

[13] Fujinobu T, Tetsurp K, Yukio T, et al. Very Long Baseline Interferometer. Tokyo: Ohmsha, 2000: 70

Rearch on PN-DOR Beacon Used in the VLBI Orbit

CHEN Ao[1,2], TONG Li[2,3,4], WANG Rui[1], ZHENG Wei-min[2,3,4]

(1. School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 201900, China; 2. Shanghai Astronomical Observatory, Chinese Academy of Sciences, Shanghai 200030, China; 3. National Basic Public Science Data Center, Beijing 100190, China; 4. Shanghai Key Laboratory of Space Navigation and Positioning Techniques, Shanghai 200030, China)

Abstract: Phase fluctuation error is one of the important errors of VLBI orbit system in the lunar exploration and deep space exploration. It is caused by the different spectrum structure of DOR and radio source signal, which leads to the inconsistency of phase fluctuation of receiving equipment. The novel PN-DOR beacon realizes the spectrum structure similar to the radio signal through the spread spectrum modulation of the existing DOR beacon by the pseudo random sequence, which can effectively reduce the phase fluctuation error. This paper studies the calculation methods of phase error and bandwidth synthesis group delay error of PN-DOR beacon in VLBI orbit measurement. On this basis, by comparing the total delay error of PN-DOR and DOR beacon under the same transmission power, the applicable condition of PN-DOR is analyzed.

Key words: VLBI; PN-DOR beacon; phase error; group delay error